

сигнал
игра

Аналогичная игра: 1 и 2 игрока. У них мн-во (чисел) стратегий
 X, Y - их мн-во чисел. стратег.
 $x \in X, y \in Y$ - выбор игроков
 Задача и мн-во игроков платежная функция $K(x, y), x \in X, y \in Y$
 $K(x, y)$ - выигрыш 1го игрока & проигрыш второго
 $-K(x, y)$ - выигрыш 2го
 Это игра с нулевой суммой.
 Игроки: $\max K$, $\min K$ макс. мин.

Выбор стратегии.
 Дт.сп. X и Y конечны, т.е. $X = \{1, \dots, n\}, Y = \{1, \dots, m\}$ $K(i, j)$
 Если игрок i и о выборе стратегии соперника
 Если игрок i - i худш. сп. $\min_{j=1, \dots, m} K(i, j)$
 $\Rightarrow i$: $\max_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, m} K(i, j)$ - то макс. гар. р-т для 1го
 т.е. макс. втиср. расст. на худш. сп.
 $\underline{I} = \max_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, m} K(i, j)$ - миним. цена игры.
 $\underline{I} = \min_{j=1, \dots, m} \max_{i=1, \dots, n} K(i, j)$ - макс. миним. (ОГСИ)
 $\max_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, m} K(i, j) = \underline{I}$ макс. гар. р-т 1го игрока
 Если $\underline{I} = \max_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, m} K(i, j)$ макс. гар. р-т 2го игрока
 $\bar{I} = \min_{j=1, \dots, m} \max_{i=1, \dots, n} K(i, j)$ макс. гар. р-т 2го игрока
 Если $\bar{I} = \min_{j=1, \dots, m} \max_{i=1, \dots, n} K(i, j)$ макс. гар. р-т 1го игрока

Верхняя цена
игры

Задача матрицы

	1	...	j	...	m
i	$K(i, j)$				

1. 1. мин. т.по стр.
 2. макс. $\Rightarrow \underline{I}$
 2. аналогично

Th I $\underline{I} \leq \bar{I}$ Для конечных игр.
 = # раз matr. где все ж-ти одинак.
 $\bar{I} - \underline{I}$ - цена информации

Если $\underline{I} = \bar{I}$ значит, что стратегия i_0 $\Rightarrow \max_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, m} K(i, j)$ т.е. $\bar{I}$ равен
 для действ. стратегии i_0 $\Rightarrow \max_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, m} K(i, j)$
 т.е. $\underline{I}$ - макс. р. без и-ч $\Rightarrow$ очевидно $\underline{I} \leq \bar{I}$
 $\underline{I}$ - макс. р. когда есть ич

Как найти $\underline{I}$ и $\bar{I}$ для игр:
 x : $\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) = \underline{I}$ Если $\sup$ достигается $\Rightarrow \underline{I} = \inf_{y \in Y} K(x_0, y)$
 x_0 - ОГСИ
 y : $\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) = \bar{I}$ Если $\inf$ достигается $\Rightarrow \bar{I} = \sup_{x \in X} K(x, y_0)$
 y_0 - ОГСИ

Th II Для беск. аналог. игр $\underline{I} \leq \bar{I}$
 равенство дост. во аналогично

Th 8 Если ф-я $K(x, y)$ непрерывна на мн-ве $X \times Y$, X, Y компактны, то $w(x) = \min_y K(x, y)$ и $w(y) = \max_x K(x, y)$ непрерывны на мн-вах X и Y соответственно. (если X, Y не компактны, то не верно)

$\Rightarrow$ максим. и миним. значения стр. I, уо миним. максим. стр. II

Def $K(i, j)$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$

Пара стр. (i_0, j_0) - седловый пункт в игре, если $K(i, j_0) \leq K(i_0, j_0) \leq K(i_0, j)$ $\forall i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$

Дополнительно к стр. только требуется р-т для игроков.

В общем сл. $I(x, y)$, $x \in X, y \in Y$
(x_0, y_0) - с.п. если $K(x, y_0) \leq K(x_0, y_0) \leq K(x_0, y)$ $\forall x \in X, y \in Y$

Th 9 В конечной игре седловый пункт $\exists \Leftrightarrow \underline{I} = \bar{I}$
Если 1 игрок имеет $\underline{I} = \bar{I}$ и i_0, j_0 - вне. стр. игроков $\Rightarrow (i_0, j_0)$ - с.п.
Если 1. Если (i_0, j_0) - с.п., то i_0, j_0 - вне. стр. игроков

Th 5 Если $\exists$ стр. i_0, j_0 и константа v : $K(i, j_0) \leq v \leq K(i_0, j)$ $\forall i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \Rightarrow (i_0, j_0)$ - с.п. и $v = K(i_0, j_0)$

Th 6 Пара с макс. ф-ей $K(x, y)$, $x \in X, y \in Y$ имеет с.т. $\Leftrightarrow \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y)$

(если $\exists$ с.т. $\Rightarrow$ макс и мин достигнут.) (стр. - если р-т $\Rightarrow \exists$ с.т.)

Лемма 1 Если (x_0, y_0) - с.т., то $K(x_0, y_0) = \underline{I} = \bar{I}$

С.т. в матр. игре - макс в стр. и мин в стр. игрока.

(2 ф) нет с.т. $\underline{I} = 1, \bar{I} = 2$
максим. миним. стр. миним. макс. стр.

Th 7 Если $\exists x_0, y_0$ стратегий и $v = \text{const}$: $K(x, y_0) \leq v \leq K(x_0, y)$ $\forall x \in X, y \in Y$
 $\Rightarrow (x_0, y_0)$ - с.п. $v = K(x_0, y_0)$

Th 8 Пара с $K(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$, где X, Y компактны имеет седловую точку $\Leftrightarrow \max_x \min_y K(x, y) = \min_y \max_x K(x, y)$
(то сл. стр. inf, но ф-я непрерывна)

Пример 1 Бесконечная дуэль
Дуэля, по кругу, вперёд (или - вперёд, дуэль закончена)

Впер. в момент $[0, 1]$

Два игрока вступают в перестрелку (не стреляют в вперёд)

$p(x), q(y)$ - ф-и меткости. $x, y \in [0, 1]$

Решить, кто вернее направит оружие при встрече.

или забьют игроков.

Впер. 1 или 1-й игрок, а то нет

- 1-й игрок

0 - оба перестают (не стр.)

ф-я впер. - макс. отсрочка вступления

$$\begin{aligned} \text{м.в. } d: d_1, \dots, d_n \\ p_1, \dots, p_n \\ M(d) = \sum d_i \cdot p_i \end{aligned}$$

$$K(x, y) = \begin{cases} p(x) - (1-p(x))q(y), & x < y \\ p(x)(1-q(y)) - (1-p(x))q(y), & x = y \\ -q(y) + (1-q(y))p(x), & x > y \end{cases}$$

$$\text{Если } p(x) = x, q(y) = y \quad K(x, y) = \begin{cases} x-y, & x < y \\ 0, & x = y \\ y-x, & x > y \end{cases}$$

? Или с.т. и средние значения стр. I, II
с.т. нет
 $x_0 = \sqrt{2} - 1, y_0 = \sqrt{2} - 1$
 $\bar{I} = 2\sqrt{2} - 3, \underline{I} = 3 - 2\sqrt{2}$

Пример 2 Штурм дупель: если встретил и проиграл, то он отступил
ф-и меткости - безразличны

$$K(x, y) = \begin{cases} p(x) - (1-p(x))q(1), & x < y \\ p(x)(1-q(1)) - (1-p(x))q(1), & x = y \\ -q(1) + (1-q(1))p(1), & x > y \end{cases}$$

? Или с.т. и стр. опт. стр., с.т.
 $\underline{I} = \bar{I} = 0$
с.п. $(1/2, 1/2)$

Пример 3 Игра с вступом, минимизация вступления

Най игрок - подвиг, подвиг

Два - объект на дупель

или 1. Вступ и играция с.т.

с.т. игроки советует, решают, вступают, антагон. раз. стр. 1 и 2, кто уступит.

д. группа минимизация вступления
1 - игрок уступает, объект
0 - объект уступает, игрок

$$K(x, y) = \begin{cases} 1, & x < y, x > y, d \\ 0, & x \in [y, y+d] \end{cases}$$

$$x, y \in [0, 1], d \in (0, 1) \quad \# d = 1/2 \quad K(x, y) = \begin{cases} 1, & x < y, x > y + 1/2 \\ 0, & y \leq x \leq y + 1/2 \end{cases}$$

$$w(x) = \min_y K(x, y) \equiv 0$$

$$\max_x w(x) = 0 \Rightarrow \text{вступ. опт. } \underline{I} = 0$$

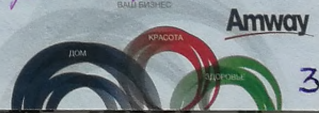
$$w(y) = \max_x K(x, y) \equiv 1 \quad \min_y w(y) = 1 \Rightarrow \bar{I} = 1$$

или с.т.

Задача 1 Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) - с.т. $\Rightarrow (x_1, y_1)$ и (x_2, y_2) - с.т.

или. $K(x_1, y_1) = K(x_2, y_2) \leq K(x, y)$

$K(x, y_1) \leq K(x, y_2) \leq K(x_1, y_2) \Rightarrow (x_1, y_2)$ - с.т. не опт.



Исходная матрица имеет стр.

1. Пара всегда имеет с.р. $\Rightarrow$ можно $\max_{p \in P} \min_{q \in Q} A(p, q) = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} A(p, q)$

2. Макс. ф. в шире.

Лемма 1. Каждая пара $i \in I$ шире с макс. макс. $A(p, q)$, $i \in I$, $j \in J$ образует пару $i \in I$ шире $A(p, q)$, $i \in I$, $j \in J$, $i \in I$, $j \in J$

3. Тройка (p^*, q^*, V) является решением игры $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(i, q^*) \leq V \leq A(p^*, j)$ $\forall i \in I, j \in J$ $\Rightarrow$ частн. вып.

3. $\forall p \in P_n \min_{q \in Q_m} A(p, q) = \min_{j \in J_m} A(p, j)$
 $\forall q \in Q_m \max_{p \in P_n} A(p, q) = \max_{i \in I_n} A(i, q)$

или можно $d_n \leq q^* = (q_1, \dots, q_n, 0, \dots, 0) \in Q_m$
 $\text{т.е. } A(p, j) = A(p, q^*)$
 $\text{под } q^* \leq \text{пр.} - \text{выбрана}$
 $\text{сравно} - \text{можно все сделать}$

След. 1 $V = \max_p \min_q A(p, q) = \max_p \min_q A(p, q) = \min_{j \in J} \max_{p \in P} A(p, j)$
 $V = \min_q \max_p A(p, q) = \min_q \max_p A(p, q) = \max_{i \in I} \min_{q \in Q} A(i, q)$

След. 2 (p^*, q^*, V) решение $\Leftrightarrow \min_{j \in J} \max_{p \in P} A(p, j) = \max_{i \in I} \min_{q \in Q} A(i, q) = V$

Лемма 4. $I(p^*, q^*, V)$ - решение $\Rightarrow$ 1. Если $p_i^* > 0 \Rightarrow A(i, q^*) = V$
 2. Если $q_j^* > 0 \Rightarrow A(p^*, j) = V$

5. P^*, Q^* - выпуклые множества

Доминирование строк и стб. в матричной игре.

2 4 6
1 3 5

Т.т. Если некая стр. матрицы доминирует (строго доминирует) выпукл. или лев. остальные строк, то эта строка входит с вес. ≥ 0 в экстр. (V) в с.р. I (то можно игнорировать)
 " " стб. " " доминирует (стр. домин.) строго н.к. экстр. ≥ 0 в экстр. (V) в с.р. II (то можно игнорировать)

Выпуклые л.к. $d_i \geq 0, \sum_{i=1}^n d_i = 1$

Доминируется: $a_{ij} \leq \sum_{i=1}^n a_{ij} d_i$

Утв. Если $f'' \geq 0$ (> 0 - стр. выпуклая) $\Rightarrow f$ - вып. (стр. вып.)
 $f'' \leq 0$ (< 0) $\Rightarrow f$ - вогнутая (строго вогнутая)

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$$f'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Оценим $f''(x, x) = (2x_1, \dots, 2x_n, x) = 2x_1^2 + \dots + 2x_n^2 > 0 \forall x \neq 0$
 $\Rightarrow$ строго выпуклая функция (поп. стр. выпуклая)

Ранг $n \times m$

$$A(p, q) = pAq$$

$$A(p, j) = [pA]_j \quad \text{на стб}$$

$$A(i, q) = [Aq]_i \quad \text{на строку}$$

$$p, q \text{ - с.р.} \Leftrightarrow [Aq]_i \leq V \leq [pA]_j \quad i \in I, j \in J$$

Метод решения матричной игры в выпуклых стратегиях

Игра $2 \times n$, $n \times 2$

Игра $2 \times n$ - платеж. matr. с 2-ми стр.
 можно свести к такой игре через доминирование.

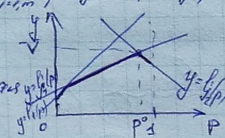
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

$$p = (p, 1-p) \text{ - вероятност. вектор}$$

то как у стб. $V = \max_{p \in P} \min_{j \in J} A(p, j) = \max_{p \in P} \min_{j \in J} (pa_j + (1-p)a_{2j})$

Графический метод

попр. ф-ли f_i $y = pa_j + (1-p)a_{2j}$
 $f_i(p)$ - прямая
 берем при фикс. р. напл. точку
 $\Rightarrow$ решено
 ищем самую высокую точку (либ. отр. $\Rightarrow$ q_p)
 $\Rightarrow p^*, V$
 $p_V^* = (p^*, 1-p^*)$



1) $p \in (0, 1) \Rightarrow$ есть 2-е уравнение $f_1(p) = f_2(p)$
 $k_j = a_{1j} - a_{2j}$ - угловой к-т прямой

$$k_j = a_{1j} - a_{2j} \geq 0 \quad k_j \leq 0$$

$$f_1(p) = f_2(p) = V$$

$$k_j \cdot p^* + k_j \cdot (1-p^*) = 0$$

$$p^* \in [0, 1]$$

$$q^* = (0, \dots, 0, q^*, 0, \dots, 0) \text{ - с.р. II}$$

15.09.16

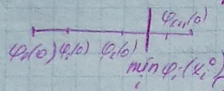
Amway

15

Принцип уравнивания. Показательство.

ВР

выбор k : макс. k при к-й $\varphi_k(0) \leq \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0)$
 $\parallel \max_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, n} \varphi_i(x_i)$ на loc : $K(x, y)$ -нпр. $\Rightarrow$
 $\varphi_i(x_i) = \min_{j=1, \dots, n} K(x_i, y_j)$ - нпр.
 $\Rightarrow \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i)$ нпр. по x , x -скал. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Экстремальное разл. разл. $\parallel$
 выберем $\max k$: $\varphi_k(0) \leq \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0)$



Д-во: от противного.

$k < n$
 поставим $x_{i_1}^0 = \dots = x_n^0 = 0$
 $\exists x_{i_1}^0 > 0, i_1 < k$
 строим новое разл.
 $x_i^0 = \begin{cases} x_{i_1}^0 - \varepsilon, & i = i_1 \\ x_i^0, & i = i_1 \\ x_i^0, & i < k, i \neq i_1 \end{cases}$
 покажем, что оно лучше x_0 (это $W(x^0, \text{опт.})$)
 т.е. что $\min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0) > \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0)$
 • $\varphi_{i_1}(x_{i_1}^0) > \varphi_{i_1}(0) = \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0)$
 • $i = i_1, k$
 $\varphi_i(x_i^0) > \varphi_i(x_i^0) \geq \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0)$
 • $i > k, i \neq i_1$
 $\varphi_i(x_i^0) = \varphi_i(x_i^0) \geq \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0)$
 $\Rightarrow \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0) > \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0)$

т.е. поставим $\varphi_k(x_i^0) = \dots = \varphi_k(x_k^0)$

Д-во: от противного

$\exists i_1, i_2 \neq i_1 \neq i_2 \leq k$: $\varphi_{i_1}(x_{i_1}^0) < \varphi_{i_2}(x_{i_2}^0)$ (по выбору k)

покажем, что $x_{i_2}^0 > 0$
 $\exists x_{i_2}^0 = 0 \Rightarrow \varphi_{i_2}(0) > \varphi_{i_1}(x_{i_1}^0) \geq \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0)$
 $\Rightarrow x_{i_2}^0 > 0 \Rightarrow$ отменим ε , но $\varphi_{i_1}(x_{i_1}^0) \leq \varphi_{i_1}(x_{i_1}^0 - \varepsilon)$
 можно в силу нпр-ти.

$x_i^0 = \begin{cases} x_{i_1}^0 - \varepsilon, & i = i_1, i \neq i_2 \\ x_{i_2}^0 - \varepsilon, & i = i_2 \\ x_i^0, & i > k \end{cases}$

• $i = i_1, i \neq i_2$
 $\varphi_i(x_i^0) > \varphi_i(x_i^0) \geq \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0)$

• $\varphi_{i_2}(x_{i_2}^0) > \varphi_{i_2}(x_{i_2}^0) \geq \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0)$

• $i > k$
 $\varphi_i(x_i^0) = \varphi_i(x_i^0) \geq \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0)$ по нпр. $W(x_i, i_2) \neq \exists$
 $\Rightarrow x^0$ не опт.

нз $k=n$

$\Rightarrow$ прямо уравнивается.

Покажем единственность опт. разл. p^0 .

$\exists x^0, y^0$
 $\Rightarrow \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(x_i^0) = \min_{i=1, \dots, n} \varphi_i(y_i^0)$

$\Rightarrow k$ будет одним и тем же $\Rightarrow$
 $\Rightarrow k=n$ $\varphi_i^0 = \varphi_i^0 = 0, i = 1, \dots, n$

$\varphi_i(x_i^0) = \dots = \varphi_i(x_i^0)$

$\varphi_i(x_i^0) = \dots = \varphi_i(x_i^0)$

$\exists i_1 \leq i \leq i_2: x_{i_1}^0 \neq x_{i_2}^0$

$\Rightarrow \varphi_i(x_i^0) = \varphi_i(x_i^0)$
 $\varphi_i^0 = \varphi_i^0$ т.е. φ_i - монот.

и т.д.

Лемма / утверждение 1.2

$B \leq \frac{A}{p_n}$
 $x \in X$

$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n > 0$
 $\tilde{y}_i = \begin{cases} x_i p_i, & i = 1, \dots, i_0 - 1 \\ 0, & i > i_0 \end{cases}$ i_0 - полностью раскрыты
 опт. вект. лб.

$F(x, \tilde{y}) = x_{i_0} - (B - \sum_{j=1}^{i_0-1} \frac{x_j}{p_j}) p_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^n x_i = \sum_{i=i_0+1}^n x_i - p_{i_0} B + p_{i_0} \sum_{j=1}^{i_0-1} \frac{x_j}{p_j} =$
 $= A - \sum_{i=1}^{i_0-1} x_i - p_{i_0} B + p_{i_0} \sum_{j=1}^{i_0-1} \frac{x_j}{p_j} = (A - p_{i_0} B) + \sum_{j=1}^{i_0-1} \frac{(p_{i_0} - 1)}{p_j} x_j \leq$
 $\leq A - p_{i_0} B$

это макс, что можно получить, если выбрать x^0

$x^0 = (0, \dots, A/p_{i_0}, \dots, 0)$ опт. разл. p -т. поставим

$F(x^0, \tilde{y}(x^0)) = A - p_{i_0} B$

$\tilde{y} = (0, \dots, 0, B) \Rightarrow F(x^0, y^0) = A - p_n B$

Бескоординатные игры. можно договориваться
 ситуация равновесия

n игроков, X_i - м-во стр. i -го игрока $i = 1, \dots, n$
 $X = X_1 \times \dots \times X_n$
 $f_i(x_1, \dots, x_n)$ $i = 1, \dots, n$ - выигрыш i -го, если они выбрали указавшую стр.
 $x = (x_1, \dots, x_n)$
 Антисим. ч-т - част. игра при $[n=2; f_1(x_1, x_2) = -f_2(x_1, x_2)]$

Витязио равновесие по Нэшу - вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ где $\forall i \in X, i=1, \dots, n$ $f_i(x_1^*, \dots, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \geq f_i(x_1^*, \dots, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$

Для каждой игрой не выгодно откл. от своей стр. x^*

Прим. Дилемма заключенного
две преед. и общий срок

I \ II (преед., своб.)		II	
I	преед.	II преед.	II своб.
	своб.	II преед.	II своб.

все равн. (3,3) (1,1)

Здесь корректное решение (II, II) - не выравн., т.е. есть соотношение отклонения от этой стратегии

Прим. $\begin{pmatrix} I \\ 20 \\ 01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} II \\ 20 \\ 01 \end{pmatrix}$ все равн. (1,1) (2,2)

Общ. $V_i = X_i, i=1, \dots, n$ - выигрыш или стр.
 $y_i \in V_i, V = V_1 \times \dots \times V_n$

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) - f_i(x_1, \dots, x_i, y, x_{i+1}, \dots, x_n)]$$

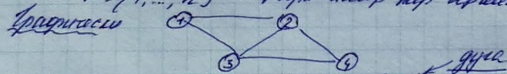
Т.е. $f_i(x)$ - макс. по X $\forall i=1, \dots, n$. Тогда $x^* \in X$ - все равн. $\Leftrightarrow$
 $\min_{y \in Y} \Phi(x^*, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \Phi(x, y) = 0$
 x^* - точка дост. максимума

24 курса Поток в сетях

опущен. план - Корвай Т. Фордerson Ч., Ривест Р. - алгоритм, построение ч. сети, методы V.

Римингс Д., Параллельная А. Методы анализа сетей
Панафинилов Х., Сиваченко Е. - комбинаторная оптимизация алгоритмы и методы

Граф - $G = (V, A)$ множество верш. и ребер. верш. - элементы, набор этих
 $V = \{1, \dots, n\}$ Ребро - набор пар верш., $A = \{(i, j) | i, j \in V\}$



Ориентация - пар. или неор. (i, j) - ориент. из верш. i в верш. j .
Сеть - граф, в котором вершинами или дугами (или и теми и другими)

Если дуга (i, j) принята $f_{ij} \geq 0$ - пропуск способности дуги.
Если дуга (i, j) принята $f_{ij} < 0$ - пропуск способности дуги.
Если дуга (i, j) принята $f_{ij} = 0$ - пропуск способности дуги.
Если дуга (i, j) принята $f_{ij} = 0$ - пропуск способности дуги.

Поток - то функция на дугах $f_{ij} (i, j) \in A$, ком. удовл. стр.:

- $f_{ij} \geq 0 \forall (i, j) \in A$
- $f_{ij} \leq c_{ij} \forall (i, j) \in A$
- узелов сети $\sum_{(i, j) \in A} f_{ij} = \sum_{(i, j) \in A} f_{ji} \forall i \in V, i \neq s, t$

каждый узел входит, столько и выходит

в источ. может входить дуги

генераторы теории - и. В. В. и пр. век. генерал Форд и шва. Раллерсон

Лемма 1 Равн. сети $G = (V, A)$ (s, t, f_{ij}) дуги f_{ij} - дуги сети. Тогда $\sum_{(i, j) \in A} f_{ij} = \sum_{(i, j) \in A} f_{ji} = \sum_{(i, j) \in A} f_{ij} = \sum_{(i, j) \in A} f_{ji} = \sum_{(i, j) \in A} f_{ij} = \sum_{(i, j) \in A} f_{ji}$

тот величина потока, неограниченно из источника. Если $f_{ij} = 0$ - величина потока, неограниченно из источника.

Задача о максимальном потоке

Найти $\max f_{ij}$ при стр. 1) - 3)

затрата или прибыль

Алгоритм Форда-Раллерсона - все дуги на сет. имеют увеличивающую стр.,

Увелич. путь - $s \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow t$ - миним. вл. в виде дуг. f_{ij} - миним. (обходим по направлению), f_{ji} - максим. (обходим против стр.).

- на 1-м этапе все дуги в сети $f_{ij} = 0$ - все дуги удовл.

Значимую дугу. Пусть на ней поток f_{ij} . Можно увеличить только при $f_{ij} < c_{ij}$, уменьшить на $f_{ij} > 0$ - не более чем на $f_{ij} = c_{ij} - f_{ij}$

В дугу f_{ij} - $f_{ij} \geq 0$ - значит, уменьшение потока. Можно только при $f_{ij} > 0$ не более чем на $f_{ij} = f_{ij}$

$\delta = \min(f_{ij})$ - миним. дуги в обратном пути. $\rightarrow$ по каждой дуге увеличим, но обратный - уменьшим. $f_{ij} = f_{ij} + \delta$, $f_{ji} = f_{ji} - \delta$. $\rightarrow$ усл. 1-2 выполнены. 3-й этап вкл., т.к. $\sum \text{вход} \geq \delta \Rightarrow a$, $\sum \text{выход} \geq \delta \Rightarrow a$. или $\delta = 0$ - вл. по той дуге $\delta = 0$

Если $\delta > 0 \rightarrow$ велич. потока из источника в сеть увеличится на δ

Увелич. путь - путь, все дуги графа из источника в сеть, для всех $\delta > 0$ (путь из источника в сеть, по которому дуги направлены не в сторону увеличения потока)

Алгоритм Форда-Раллерсона

- 1) выбрать произвольный начальный поток
- 2) найти увеличив. путь π
- 3) если $\delta(\pi) > 0$; увеличение потока перейти на шаг 2

Если нет: на шаг 4.
4) остановиться. $f_{ij} = \max$ поток

Как учесть увелич. путь?

Алгоритм расстановки пометок

информации об источнике, можно ли исп. в увелич. пути

как только достиг до источника - пометки & сор. их

Пометки Прямых и Обратных

Непомеченный

а. во узле H .

1. Присвоить узлу S метку $(-)$ - ПН

2. Если нет ПН - остановиться, увелич. пути нет

3. Выходя из узла H , каждому H узлу $j: (i, j) \in A$:
 $f_{ij} < t_{ij}$ присвоить метку $(+)$

Каждому H узлу $j: (j, i) \in A$, $f_{ji} > 0$ присвоить метку $(-)$ и считать j - ПН

Узел i - ПН

4. Если узел t - помечен - перейти на шаг 2

Если t - помечен $\rightarrow$ изменить увелич. путь, двигаться по меткам в обратном напр-ии.

Случай 1 все $t_{ij} \in M$

Предположим: если $\exists$ увелич. путь, то он равен, или по крайней мере, длиннее, чем самый короткий. Будем считать увелич. путь

Прим. концы, т.е. концы дуг, между верш. и вх. - конечно.

Число верш. конечно, дуг - конечно.

Если $f_{ij} \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow$ после поиска кратчайш. пути процедура увелич. потока

т.е. минимизация затрат - конеч.

исх. поток $\text{свр.} \sum t_{ij} \Rightarrow M \text{ свр. сверху} \Rightarrow \text{алг. констант}$

$B = (V, A)$, $|V| = n$, $|A| = m = O(n^2)$

Время поиска кратчайш. путей - $O(m)$

после свр. дуги u и v не возвращаются

$u = \max_{i,j \in A} t_{ij} \Rightarrow \max_{i,j \in A} M(f) < n \cdot u$, т.е. u изст. $\leq n$ дуг, $t_{ij} \leq u$

$\Rightarrow$ число свр. к процедуре свр. сверху $\leq n \cdot u$

$\Rightarrow O(n \cdot u)$ т.е. $O(n^3)$ - много, но можно проб

Оценка алг. Форда-Ромера

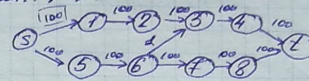
Случай 2) t_{ij} - рач. P сведется, если брать др. сд. измерению

Случай 3) t_{ij} - иррац.

есть пример, что алг. не всегда корректен
 1, 2, 3, ... в пр. 1, а велич. и д. 10, да еще 100.

Алгоритм Котанова

Нормирован алг. Ф.Р.



можно получить:

$S-5-6-3-4-t$ $\delta=1$

$S-1-2-3-6-7-8-t$ $\delta=1$

$S-5-6-3-4-t$ $\delta=1$

т.е. вернется 100 часов вместо 2

$\rightarrow$ можно кратчайш. увелич. путь (по меткам дуг)

яко бы определены все увелич. пути ($\Rightarrow$ пути сужены метками)

Алг: 1. Выбор ($\neq 0$)

2. Проверка

Если есть поток, тогда f_{ij} , $B = (V, A)$, s, t , t_{ij} , $|V| = n$, $|A| = m$

Вместо f_{ij} для потока f_{ij} - $B(f) = (V, A(f))$

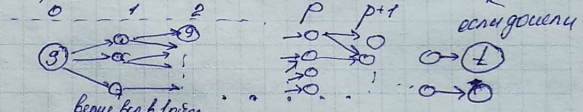
1. Если $f_{ij} < t_{ij} \Rightarrow (i, j) \in A(f)$, $t_{ij} = t_{ij} - f_{ij}$

2. Если $f_{ij} > 0 \Rightarrow (j, i) \in A(f)$, $t_{ji} = f_{ji}$

и в B - и д. $t_{ji} = t_{ji}$, а в $B(f)$ их и д. t_{ji}

Вместо $B(f)$ - вкл. в себя все прим. кратчайш. пути из s в t в $B(f)$

Список s -



верш. вкл. в $B(f)$

входящие дуги

входят в $B(f)$ и исп.

Успех: если s - др. верш. $\Rightarrow$ они лишние

удалены верш. и идентификатор дуги

двиг. до уз. D - аналогично.

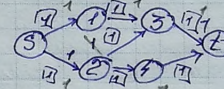
Если вошли на тот шаг $\Rightarrow$ есть всегда путь непересекающийся.

Тренировка: если отсюда, что нет в сети, можно увелич. пути.

В том потоке свр. тренировка, т.е. что не шло шло-то увелич. пути

свр. не верно

Трени



$S-1-2-3-t$ - трениров. поток по меткам.

Алгоритм: 1. Выбор произв. нач. потока f_{ij} ($\nexists f_{ij} = 0$)

2. $B(f)$

3. Если в $B(f)$ нет кратчайш. пути из s в t , то f - макс. поток

ОСТАНОВИТЬСЯ

Иначе - перейти на шаг 4.

4. $B(f) = (V^*(f), A^*(f))$

5. Трениров. поток g в $B(f)$ (по меткам)

6. Увеличить поток f и перейти на шаг 2

avg. 579

13.10

10

Семантика разр. $\pi(V_0, \bar{V}_0) = \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ i \in V_0, j \in \bar{V}_0}} u_{ij}$

5) $V_c \rightarrow \bar{V}_c$

Прямой поток через разрыв $F = \sum_{i \in V_0, j \in V_1} c_{ij} x_{ij}$

Deparazitare - - - $\vec{F}_e = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} f_{ij}$

$$\frac{Th(\text{омакс. поток и мин. разреж.})}{\text{величины мин. разреж.}} \text{ Величина макс. потока в сети равна}$$

$M(f) = F_c - F_0$ по сур. парам $f_j \geq 0 \Rightarrow F_c \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow F_c - F_0 \leq F_c \leq u(V_0, V_0)$ (п.с. $f_j \leq u_{ij}$)

Матрица $\mathbf{M}$ называется **симметричной**, если $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$.
 Матрица $\mathbf{M}$ называется **диагональной**, если $\mathbf{M}_{ij} = 0$ для $i \neq j$.
 Матрица $\mathbf{M}$ называется **унитарной**, если $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^H$.
 Матрица $\mathbf{M}$ называется **эрмитовой**, если $\mathbf{M} = \mathbf{M}^H$.
 Матрица $\mathbf{M}$ называется **симметричной**, если $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$.
 Матрица $\mathbf{M}$ называется **диагональной**, если $\mathbf{M}_{ij} = 0$ для $i \neq j$.
 Матрица $\mathbf{M}$ называется **унитарной**, если $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^H$.
 Матрица $\mathbf{M}$ называется **эрмитовой**, если $\mathbf{M} = \mathbf{M}^H$.

Получено 200,

$\frac{1}{2} \frac{F}{F_0}$ - малые потоки - для них справедливы формулы
 $\frac{1}{2} \frac{F}{F_0}$ - для больших потоков для них справедливы формулы
 $\frac{1}{2} \frac{F}{F_0}$ - для больших потоков, для них справедливы формулы
 $\frac{1}{2} \frac{F}{F_0}$ - для больших потоков, для них справедливы формулы
 $\frac{1}{2} \frac{F}{F_0}$ - для больших потоков, для них справедливы формулы

Другие дуги $(i, j) \in A; i \in V_0, j \in V_1$

$$F_{ij} = \psi_{ij} \text{ без счисления пров. расст.}$$

получено: если $\Leftarrow$ $\Rightarrow$ $\neg$ -помощный ω
где $\text{sup. } 942 \ (k, p) \in A, k \in V_1, p \in V_2$

$\bar{p}(q) = 0$ - ц. опис. той же проу.

$\rightarrow N(\sqrt{p}) \in F - F = N(\sqrt{p} \mid \overline{F}) = 0 = N(\sqrt{p} \mid \overline{F})$

$$\Rightarrow M_H F_{T_c} - T_c = u(V_c, V_c) - 0 = u(V_c, V_c)$$

нашри = power $\Rightarrow T_b$ 90%

+ Предназначен для нахождения мин. разрыва

Эта Γ обеспечивает равенство Γ кривизн расей. наметок

$M_{\text{ф}} = \text{век. разр} \Rightarrow \text{поток максимален}$

$$\frac{O(nm^4)}{O(n^3u)} \geq \text{cy. P.P.}$$

показали более 2000 процедур

474

Iman

Как снизить тепловый поток?

1. окр. прен. снос-ть катод. утр.

$$a(s) = \sum_{(s, i) \in A^+} u_s$$

$$a(t) = \sum_{i=1}^n v_i$$

$$a(i_0)_{i_0 \neq s, t} = \min_{(j, t) \in A^*(t)} \left(\sum_{(j, i_0) \in A^*(t)} t_{ji_0}, \sum_{(i_0, j) \in A^*(t)} t_{i_0j} \right)$$

2. найти самый слабый узел $\min Q(v) = Q(i_0)$
 $- Q(i_0) \rightarrow \Delta$ и удалить $i \in V^*(f)$


 не > 90 град
 полностью насквозь

уровень p

$\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{свободно настп.} \\ \text{вст. - настп.} \end{cases}$

$p+1$

и т.д. (св. настп. настп.)

для уровня $p+1$ - то же самое (переход на $p+2$)

$\Rightarrow$ аналог до σ_{n-1} , т.е. $\angle$ свобод. настп.

Аналогично введем ^{узел:} вправо до источника

удал. Увелич. массы дуги и высоты дуги (не пех. ни звука, ни восток ни запад)

После упр. пром. способ $\Rightarrow$ в составл. сети делаем то же самое

⇒ речные илы — осадочный материал, который образуется в результате эрозии и выветривания горных пород. Он состоит из мелких частиц (песок, глина, ил) и органических веществ (растительные и животные остатки). Илы являются важным источником питательных веществ для растений и животных. В природе илы накапливаются в низинах, поймах рек, озерах и морях. В сельском хозяйстве илы используются как удобрение. В промышленности илы используются для производства цемента, кирпича и других строительных материалов.

Можно показать, что от Эпана к Эпанау к-т длина прост. пути
из S в T увелич. на кр. верш. на t , т.е. в (t) дл. вс кратчайш.
пути, max. гр. - $n-1$
 $\Rightarrow O(n)$ этапов (не $> n$ этапов)

Оценки сложность (5)

нот. напич. дуга даже при шед. шт. на ⑤ $\text{опр. } \text{прог} \Rightarrow \text{дк } O(m)$
 част. напич. дуга $\forall i_0$ не более $\text{дк } O(n^2)$ - $\text{нфр. } \text{опи.}$
 $\Rightarrow O(n^2)$, т.е. $m = O(n^2)$

$\Rightarrow$ Ал. Ант. $O(n^3)$ - нег. зап. и пр. в отн. к ант. Ф.Ф.

55/52

Составление многопроцессного расписания с прерыванием

программный модуль) - дочерской интерпретации

интервал (рабочий момент вкл.
при интервале (вращения) - без пер.

робота втн. не более чем 1/2 кред.

Иногда не более работы

инт. ограничен, т.е. $[0, T] \Rightarrow L_i \leq T \forall i \in \mathbb{N}$

τ $\mathbb{Z}_p$ -sup. $[t_1, t_1 + t_2]$
 τ $\mathbb{Z}_p$ -sup. $[t_2, T - t_2]$



Рассуждения о...



1



24)

10

1974

2

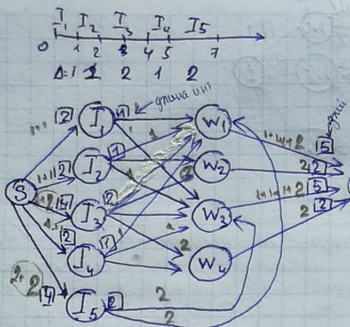
2

$$x_3 - z$$
$$s = 1$$

26

Пример 2 $n=4$
 $m=2$

i	b_i	f_i	t_i
1	0	7	5
2	1	4	2
3	0	7	5
4	2	5	2


$$\begin{array}{rcl}
 3 - I_5 - W_3 - t & \delta = 2 \\
 8 - I_5 - W_1 - t & 2 \\
 3 - I_3 - W_4 - t & 2 \\
 5 - I_3 - W_2 - t & 2 \\
 5 - I_1 - W_1 - t & 1 \\
 5 - I_1 - W_3 - t & 1 \\
 5 - I_2 - W_1 - t & 1 \\
 5 - I_2 - W_3 - t & 1 \\
 5 - I_2 - W_2 - t & 1 \\
 5 - I_4 - W_3 - t & 1 \\
 \hline
 & 14
 \end{array}$$

Exp. 

Dep.

3	3	4	3	3
---	---	---	---	---

$m = 1, n, (k_i, l_i, t_i)$ — анс. наибольшей прочности

Алг. КОЗМАННА ЭР. В кажд. месс. т. вып. работы с ним дир. сроком ф.
это точный алг. (не зблещет.)

$N = \{t_1, \dots, t_g\} \neq \emptyset$ $N(t) = \{i \in \mathbb{N} : i \text{ не окрещ. (не крещен)}, \text{ bis } t_i\}$

$$\min_{i \in N(H)} f_i = f_{i_0} \Rightarrow \text{в момент } t \text{ в нн. работу } i_0$$

? В какие мом. время возникло? - когда кто-то решил
- когда появилось БГ

$O(n)$ пересчетов
пересчет - min не более n величин.
 $\Rightarrow$ плотн. алг. $O(n^2)$ - лучше, чем потоки (там
еще $\times 2$).

Сам кр. нитратной $\Rightarrow O(n^2 \log n)$ - перест.) от. д. в. в.
 и что бы вкл. $\Rightarrow O(n^2 \log n)$
 $\Rightarrow$ сложн. алт. $O(n^2 \log n)$

Нужно обосновать:

- 1-я работа, кот. не успевае^т окончиться к сроку.

- 1-я первая работа, кот. не успевае^т окончиться в срок.

$\rightarrow$ крещ. вт данит

2) $t_2 = \frac{f_{i2}}{f_{i1}} \leq \frac{f_{i3}}{f_{i2}}$
 $t = \min(t_{i1}, t_{i2}) \Rightarrow$ внутри
 (f_{i1}, f_{i2}) крош. разл.
 2.1) Если не одно
 $\Rightarrow t_{i1} + t_{i2} > f_{i1} - t$
 2.2) Бит 3-ий - разн. анализировать

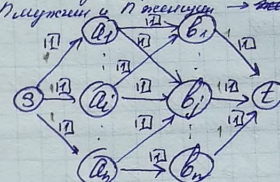
Задания о паросочетаниях в
пузырьном графе

$$G = (V, A)$$
$$V = V_1 \cup V_2$$
$$V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$$
$$V_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$A = \{X(a_i, b_j)\}$$
$$\begin{array}{ccc} a_1 & \text{---} & b_1 \\ & \times & \\ a_i & \text{---} & b_j \\ & \times & \\ a_n & \text{---} & b_n \end{array}$$

Существует ли полное паразитизирование

$\exists p \text{ пар } (a_i, b_i) (a_i, b_i) \dots (a_n, b_n) \quad a_i \in V_1, b_i \in V_2$
 $(a_i, b_i) \in A \quad i=1, n, \quad a_i, b_i \text{ второй ребро в } i \text{ паре}$
 т.е. у $\exists p$ т.е. можно ребро из пар $a-b$, состав. ребром, а b в ребро в паре
 Утвержд: Мультим. и п. разбиения $\rightarrow$ ~~можно~~ бинарн. есл. безупр. в паре $\rightarrow$ пар



прон. енос-ти I.

Увб: $\text{полюс нараст.} \exists \Leftrightarrow \text{величина } \max M(\sigma) = n$
 $\Leftrightarrow \boxed{\text{---}} \xrightarrow{1}, \xrightarrow{1} t$

Если все выш. члене $\Rightarrow$ числ. выраж. тоже на целое число делится

$\Rightarrow a_i \xrightarrow{1 \text{ шаг}} b_j$ инициально равно по ф-ле a_i и b_j
то и образуют пары

$\Rightarrow$ л. и. ч. стр. выполнимы.
будем строить. $\exists a_i \rightarrow b_j$ постоим велич. и стр. = 1,
ост. $a_i \xrightarrow{\circ} b_j \xrightarrow{\circ} b_j$

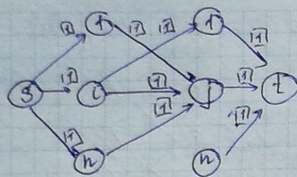
$a_i \rightarrow b_i$ аналогично
всего усл. потока в выполнении, как и сохранение потока

Заключение Бппа оценки $O(mn)$
у нас сейчас $O(n^3)$ - Карранов
 $O(mn)$ - то лучше (если, что $m \leq n^2$)

ЗАДАЧА СОСТАВЛЕНИЯ ГРАФИКА ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ ПРИ ЖЕСТКИХ ВРЕМЕННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

$N = 1, \dots, n$ - работ
для $i \in N$ $[b_i, f_i]$ - количество выполняемых, до окончания, только од.
 t_{ij} - время перем. процессора с работ i на работу j

Определить мин. число процессоров.
 $f_i, q_i \leq b_j \Rightarrow$ после i единиц работы на j - связанные работы



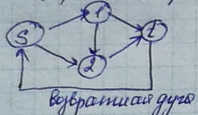
$i \rightarrow j$ - дни выполнения работ
 если вел. $\Rightarrow$ вел. дин. чин $\Rightarrow \max M(f) \in \mathbb{Z}$
 $\exists S \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow t \Rightarrow$ достаточно $n-1$ ребр.
 и т.д.

если $\max M(f) = k \Rightarrow n-1$ ребер, сов.

20.10.

ЗАДАЧА О ПОТОКЕ МИНИМАЛЬНОЙ ЕЩНОСТИ

$B = (V, A)$ все верш. равнонаправл.
 $(i, j) \in A$



L_{ij} - мин. гр. потока по (i, j)
 U_{ij} - верхняя граница
 f_{ij} - значение единичн. потока по дуге

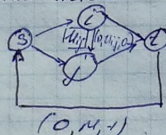
Нужно найти $\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} f_{ij}$, где $f_{ij} \geq L_{ij}$, $(i, j) \in A$
 $f_{ij} \leq U_{ij}$
 $\sum_{(i,j) \in A} f_{ij} = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} = 0$, $i \in V$ ($f_{ij} \geq 0$)
 $f_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in A$

Поток, удовл. условиям циркуляции
 Алгоритм Динеса - $O(m^2 n)$, $n = \max_{(i,j) \in A} U_{ij}$

Всп. на исп. критерия оптимальности в ЛП и с исп. целевой ф-ции решается критерия оптимальности задачи

Прим. 1.0. max потока: $B = (V, A)$, s, t, a_{ij} (напр. j. от i. см.)

$|V| = n$
 $|A| = m$



1. вводим верх. дугу.
 2. (i, j) : $L_{ij} = 0$; $U_{ij} = a_{ij}$; $c_{ij} = 0$ $c_{is} = -1$
 $L_{is} = 0$; $U_{is} = M$
 $M = \max_{(i,j) \in A} a_{ij}$
 $M(f) \leq M$

Всп. найдём циркуляцию. Будем max поток по (t, s)
 $\Rightarrow$ (ф-ция max flow) $\Rightarrow$ max поток из s в t

ч. 3. Дискретные задачи оптимизации
 Карпен, Рейдерсон, Рубин - Алгоритмы. Построение и анализ
 Миним.

Задач Н, Якоби Д. - Вычислительные методы и алгоритмы решения задач

Теория сетей

Все, что применимо к теории сетей

Прим. 1.0. Задача о разбивании.

$a_1, \dots, a_n$

? разбить $N = \{1, \dots, n\}$ на $N' \subseteq N$, $N \setminus N' : \sum_{i \in N'} a_i = \sum_{i \in N \setminus N'} a_i$

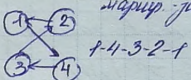
Прим. 2. Разбивание для нелинейной системы - РМПС
 $N = \{1, \dots, n\}$ - работ - интервалы и приложения
 т.ч. несовместимости
 i, j - совместимости
 T - директивные сроки

? Или разбивание, при котором каждая работа выполняется на одном из T
 т.ч. $N = N_1 \cup \dots \cup N_m : N_i \cap N_j = \emptyset$ $i \neq j$, $\sum_{i \in N_j} T_i \leq T$ $\forall j = 1, m$

Прим. 3. Задача коммивояжера - ЕОММ

Путь P , d_{ij} - расстояние
 P - верш. граница дуги и маршрута

? Или маршрут с длиной $S \leq B$
 маршрут - дин. чин, проезд. путь катоду вершину равно f_{ij}



Всп. задачи имеют конечное или бесконечное число решений: 1-2 перебором
 2^n
 $3 - (n-1)!$

Большая размерность для практических задач.
 Эту задачу можно решить в единиче оценочной модели, если все эквив. и нет
 пока эквив. алг. и не доказано, что не эквив.

Задача разбивки 2^n - П

Если из целей - определить эквив. или нет эквив. $\Rightarrow$ нужно эквив.

Их эквив. в дин. чин $f(0,1)$, f - истинно $\forall$ верш. и дуги

$\sum$ - алгоритм
 a_i - число $\lceil \log_2 a_i \rceil + 1$
 ЗР: $a_1, \dots, a_n \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lceil \log_2 a_i \rceil + 1 + (n-1) = |x|$ - группа вх. слова
 Другим оценивать как ф-ю от группы вх. слова.

П, D_n - мин. во. индивид. задач (когда констр. жинт. маршрут)
 Y_n - мин. во. индив. ф. с отв. ф-и
 $D_n \setminus Y_n$ - ответ "нет"

ф-я групп на мин. во. индив. $I \in D_n$ определяется $\ell(I)$ - минимальная
 эквив. группа вх. слова (в задачах I) - $\exists$ x полиномиальн
 $\ell(I) \leq p_1(|x|)$ $\forall I \in D_n$
 $|x| \leq p_2(\ell(I))$

Если правильно ввести ф-ю групп $\Rightarrow$ можно делать анализ и с $|x|$, ℓ
 с $\ell(I)$.

Прим. 3Р: $a = \max_{i \in N} a_i$ $\ell(I) = n \lceil \log_2 a \rceil$ ($\Gamma(I) = \min_{i \in I} a_i \geq a$)

$\ell(I) \leq |x| + 1$ $p_1(|x|)$ $\Gamma(I) \leq \ell(I)$ $p_2(\ell(I))$
 Можно $\ell(I) = n \lceil \log_2 a \rceil$

2) ? $\Rightarrow$ РМПС
 $\text{Раж} \Rightarrow \text{РМПС}$
 ч.м. $\sum_{i \in N} a_i$ - четное $\in \text{РМПС}$

Раж	РМПС
$a_1, \dots, a_n$	N четное; $m := 2$
$N = \{1, \dots, n\}$	$b_i := a_i, i \in N$
$B = \sum_{i \in N} a_i$ - четное	$T := B/2$
$L = n + \log_2 a$	
$a = \max_{i \in N} a_i$	

Синтез ответа:

1. Раж - "да"
 $N = N_1 \cup N_2, N_1 \cap N_2 = \emptyset$
 $\sum_{i \in N_1} a_i = \sum_{i \in N_2} a_i = B/2$
 $\Rightarrow \text{РМПС} - \text{"да"}$
 2. Раж - "нет"
 $\sum \geq \sum$ т.е. $\sum_1 > B/2$ или $\sum_2 > B/2$
 $\Rightarrow$ в распр. работ на 1-й или 2-й
 $\Rightarrow \text{РМПС} - \text{"нет"}$

Прим. Утверждение внутри интервала (УВИ)

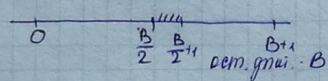
$N = \{1, \dots, n\}$
 $m = 1$
 $t_i, i \in N$ $t_i \leq f_i - b_i$
 $(b_i, f_i]$

Верн. $y = (a_1, \dots, a_n)$
 проб. y - работ в обоих инт.;
 инт. не пересекаются. $O(n^2)$
 $(t_i, t_i + t_i]$
 $(t_j, t_j + t_j]$

$L = n + \log_2 F$
 $F = \max f$

1) УВИ $\in \text{РМ}$
 2) Раж $\Rightarrow$ УВИ

Раж	УВИ
$a_1, \dots, a_n$	мин. работ $f_1, \dots, f_n \cup \{m\}$
$N = \{1, \dots, n\}$	$t_i := a_i, i \in N; t_{m+1} := 1$
$B = \sum_{i \in N} a_i$ - четное	$b_i := 0, i \in N; b_{m+1} := \frac{B}{2}$
$L = n + \log_2 a$	$f_i := B+1, f_{m+1} := \frac{B}{2} + 1$



Раж - "да" $\rightarrow$ УВИ - "да"
 "нет" $\rightarrow$ всегда - "да" $\rightarrow$ УВИ - "нет"

Прим. Канн
 1. CNP
 2. ГЦ $\Rightarrow$ Канн

Прим. Множество представителей МП

конечное множество $S = \{1, \dots, n\}$
 $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ $G \subseteq S$
 $K > 0$ $K \leq n$

? существует ли S или же представителей для L или меньше K (на более K)
 $\rightarrow S' \subseteq S: \forall G \subseteq S' \exists x \in G: x \in S'$

Верн. - S' проверить $\Rightarrow D(?)$
 $L = n + m$

2) ВП $\Rightarrow$ МП	$S_i = V_i$
$B = (V, A)$	$C = \{(i, j) : (i, j) \in A\}$
K	
$ V = n$	
$L = n$	вер. парт

Прим. Трансформации подграфов ИП

$B_1 = (V_1, A_1), B_2 = (V_2, A_2)$ $L = n_1 + n_2$
 ? ед. ли B_1 подграф, чуж. графу B_2

Мутатор: $B = (V, A)$
 $V \subseteq V_1, A \subseteq A_1: \text{f.f. } V \rightarrow V_2$
 $|V| = |V_2| \quad |A| = |A_1| \quad (i, j) \in A \leftrightarrow f(i), f(j) \in A$

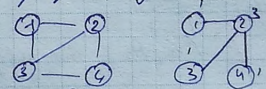
1. Верн. $G = (V, A)$ f (различной) $f: V \rightarrow V_2$
 проб. пройти по ребрам B_2 (сч. табл. и V_2) и обратно
 $\rightarrow i \rightarrow f_i$
 $\leftarrow f_j \rightarrow j$

2. Канн $\Rightarrow$ МП	$B_i := B$
$B = (V, A)$	$B_2 = \text{полн. граф с } f \text{ вершинами}$
$J \subseteq V $	

"да" если B - клика $\Rightarrow B_2$ - клика $\Rightarrow$ 2 клики с J узлов.
 обратно: если J подг. чуж. клики $\Rightarrow$ это клика в B_2

Прим. Действие дерева ограниченной степени

$B = (V, A)$ вер., $|V| = n$
 $K \leq n-1$
 ? Или в B оставш. дерево, в кот. все верш. имеют степень не более K
 1. - свести гр. с n верш. и $n-1$ ребром
 0.1. - ~~свести~~ из ребер гр. и ед. все его верш. и



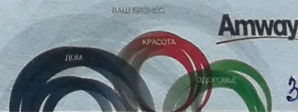
1. $\in \text{РМ}$ Верн. дерево
 уст., что 1, 0.1, ед. вер.
 степень $\leq K$

DOK

2. ГП $\Rightarrow$ ОЛОС	B
Буд. уст. кон. верш. и	$K := 2$
$B = (V, A)$	

"да" - $\text{ГП} - \text{ост. дер. ед. 2}$
 обратно: все гр. с $K=2$ - это ГП

DOK



Григорий РИХАРД (Р) (с точки зрения Вера)

$N = \{1, \dots, n\}$
 $i \in N$: S_i - станция
 V_i - адрес

? Или погрешн. $N' \subseteq N$: $\sum_{i \in N'} V_i \leq V$, $\sum_{i \in N'} S_i \geq S$

1. END

Реш. N'

- $N' \in N$ $O(n^2)$
- Σ и ep. $O(n)$

список полином.

2. $P_{avg} \Rightarrow P$

$a_1, \dots, a_n$	N
$N = \{1, \dots, n\}$	
$B = \sum_{i \in N} a_i$	$V_i = a_i, S_i = a_i, i \in N$
$P = n \cdot \log_2 a$	$V_i = B/2, S_i = B/2$
$a = \max_{i \in N} a_i$	

свод. непонижающаяся
до $\rightarrow$ Эррб. с суммой $B/2$ т.е. N'
вер: $\text{до} \Rightarrow \sum_{i \in N'} s_i \leq B/2, \sum_{i \in N'} s_i \geq B/2 \Rightarrow \sum_{i \in N'} s_i = B/2$

Прим. Самый длинный путь (септ)

$$B = (V, A)$$

$$K \leq |V| - 1$$

? Или в в простейший путь не имеет значения к ребер

1. END Лепт - путь
 • из ребер
 • простоты DOK

2. $\Gamma \cap \Delta \Rightarrow \Delta \cap \Gamma$

$B = (V, A)$ $B:$
by 4.5, $L := V \setminus \{x\}$
 $\leftarrow$ no work $\Rightarrow$ no PD
 $\rightarrow PD \Rightarrow \exists K \Rightarrow K$

Прим. Наибольший общий подграф
 $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$

? Эти графы $G_1' = (V_1', A_1')$, $G_2' = (V_2', A_2')$ являются подграфами G_1 и G_2
 $|A_1'| = |A_2'| \geq k$
 $G_1' \cup G_2'$

1. END

Лет. у: B_1, B_2 , лет. б. агу. сав. урнб

• погр.

• улов. репр. ф

• соп-во репр. пометка

2. Клика $\Rightarrow$ НОП

$B = (V, A)$ $B_1 = B$, B_2 - полный граф с J верш.
 J $K := J(J-1)/2$

$g_a \rightarrow \exists \text{ногр. с } 6 \text{ вершнн. т.е. } G_2$
 обратно: $\exists \text{ногр. уга с не менее } 7 \text{ реб, т.е. } G_2, \text{ т.е. } K_4$
 полнота: G_2
 (ср. гл. 10, уга 6, К...)

Формы Минимизации сумм квадратов (МСК)

$$\begin{aligned} & \overline{a_1 \dots a_n} \\ & K, J \\ & N = \{1 \dots n\} \\ & ? \text{ bzw } N = N_1 \cup \dots \cup N_k \quad N_i \cap N_j = \emptyset \quad i \neq j \end{aligned}$$
$$\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i \in J_j} a_i \right)^2 \leq J$$

т. е. NP

Вероят. разбиение $O(n^4)$

- переборный
- $J = N$
- суммир. $n \uparrow^2$

2. Равн $\Rightarrow$ МСК

$\sigma_1 = \frac{A_1}{A_2} \sigma_2$
 $N = \frac{A_1}{A_2} N_2$
 $\sigma = \frac{A_1}{A_2} \sigma_2$
 $\epsilon = n \cdot \frac{A_1}{A_2} \epsilon_2$

N, A_1
 $K_1 = 2 \rightarrow J_1 = \frac{B^2}{2}$
 $\text{да } (v_1)^2, (v_2)^2 = \frac{B^2}{2} = J$
 $\text{Средно: } \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) = J \rightarrow \Sigma_1 = \frac{B^2}{2}$
 $\text{Матрица: } \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) = J$
 $\text{Матрица: } \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) = J$

Формы минимизации веса цветн. радант (№ 43)

27.10

$$N = \{1, \dots, n\}$$
$$z_i, \omega_i - \text{век}, f_i - \text{директ. расходы (ноч. - один и тот же)}, m=1$$

? Или вып. рассм. без критер., при коб. $\sum W_i$ опоздавших $\leq K$

расписание: $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ - момент начала вып.
 $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n + t_i) \in \mathcal{D} \quad i \neq$

$$\sum_{k=1}^n w_k \leq K$$

1. $\in NP$ проб. ант.

1. END проб. ант.

2. Райс $\Rightarrow$ 4В43

$N = \{1, \dots, n\}$ $t_i := a_i$; $w_i := a_i$ $i \in N$
 $B = \sum a_i \cdot w_i H$ $f_i := B/2$; $\lambda := B/2$

$\rho = n \cdot \rho_0 \cdot \alpha$  всё полим. (ан. зв. и при) т.е. с.р. полим.

Розв-га^{B/2} $\Rightarrow$ "га"

хотят бы $\Gamma_{\text{неуп.}} \Rightarrow R/2 + E \text{ разд.} \Rightarrow \text{нет}$

Дрине Упакова в контейнер (УК)

$N = \{1, \dots, n\}$ предположим
 τ_i - объект, K контейнеров объектов $V, \tau_i \in V, i \in N$
 ? угадываю
 $t_i \in NP$

2. Разд. $\rightarrow$ УК
 $a_1, \dots, a_n$
 $N = \{1, \dots, n\}$
 $B = \sum_{i=1}^n a_i$
 $L = n \cdot \log_2 a_i$

"да" $\rightarrow$ можно разбить
 "нет" $\rightarrow$ нет

Задача. Интеграл косинусов (ИОК)

$\int_0^{\pi/2} [\prod_{i=1}^n \cos(a_i x)] dx \neq 0$

1. СМР

2. Разд. $\rightarrow$ ИОК

$a_1, \dots, a_n$

$N = \{1, \dots, n\}$

$B = \sum_{i=1}^n a_i$

$L = n \cdot \log_2 a_i$

$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$

$\cos(a_1 x) \cos(a_2 x) = \frac{\cos(a_1 + a_2)x + \cos(a_1 - a_2)x}{2}$

$\cos(a_1 x) \cos(a_2 x) \cos(a_3 x) = \frac{1}{4} [\cos(a_1 + a_2 + a_3)x + \cos(a_1 + a_2 - a_3)x + \cos(a_1 - a_2 + a_3)x + \cos(a_1 - a_2 - a_3)x]$

или $\int_0^{\pi/2} \cos(ax) dx = \begin{cases} 1, & a=0 \\ 0, & a \neq 0 \end{cases}$

Задача. Интеграл косинусов (ИОК)

Есть ли ед. сгр. в 0 $\Leftrightarrow$ Разд. - пол. ответ
 это вычисл. ответ

СМР: Сгр. у: разделение
 - отделить, разбит ли Σ на две в.

Задачи с числовыми параметрами.

Преобразование алгоритма.

Вильямс МР-полнота и преобразование. сводимость

$\prod_{i=1}^n \gamma_i$ | $\ell(I), I \in D_n$ мин. св. длины вк. слова

Ф-я максимума $M(I)$

равно мале числу в той разд.

или нет чисел

Аналог ϕ_i

ℓ_1, M_1

ℓ_2, M_2

это мин. св., если

1) $\exists r_1, r_2: \ell_1(I) \leq r_1, \ell_2(I) \leq r_2 \forall I \in D_n$

2) $\exists q_1, q_2: M_1(I) \leq q_1, M_2(I) \leq q_2 \forall I \in D_n$

$M_2(I) \leq q_2(M_1(I), \ell_1(I)) \forall I \in D_n$

Задача. Разд.

$\ell_1 = n \cdot \log_2 a_i, a = \max_{i \in N} a_i$

$M_1 = a$

1. $\ell_1 \leq \ell_2, r_2$

$\ell_2 \leq \ell_1$

2. $M_1 \leq M_2$

$M_2 \leq \ell_1, M_1$

Всп. $\prod$ Плана, выбирая пара ℓ, M . Ал. реш. $\prod$ - неэффективен, если
 из алгорит. сгр. $r(\ell, M)$

Задача. Если ат. исп. только $+, -, \cdot, /$ $\Rightarrow$ алгорит. свод. можно ли пров., только
 коп. сгр.

Примеч. Ф.Ф. (n, m, u) , $\ell = n \cdot \log_2 u$, $m = O(n^2)$ - неэффект.

такие ат. хорошо работ. на подл. разд., где вы числ. н-р сгр. сверху компьютера
 (туда вы пишете алгорит.)

У ат. можно на подл.

Если для н-р сгр. н-р неэффект. ат. - то корректный разд. свод.

Примеч. Разд.

$a_1, \dots, a_n, N = \{1, \dots, n\}, B = \sum_{i=1}^n a_i$ - четно, $a_i \leq B/2, i = \overline{1, n}$

построим табл. $n \times B/2$ с ат. $t(i, j)$ $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, B/2}$

$t(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists N \subseteq \{1, \dots, i\}: \sum_{i \in N} a_i = j \\ 0, & \text{в прот. сл.} \end{cases}$

Ал. Если $t(n, B/2) = 1$ - "да"
 $t(n, B/2) = 0$ - "нет"

i	j	a_i	$a_i + B/2$	$t(i, j)$	сост. ат.	интерпретация	св. разд.
1	1	1					
2	1	1	1				
...	...	...	...	...	...	...	...
n	B/2						

не можем, если 1 в стр. B/2

то выбор. устоялся если $\leftarrow B/2$ и $a_1, \dots, a_n$

Алгоритм построения табл.

1. $t(i, j) := 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, B/2}$

2. $t(1, a_1) := 1$

3. если $t(i-1, j) = 1$, то $t(i, j) := 1, j = \overline{1, B/2}$

4. если $t(i-1, j) = 1$ и $j + a_i \leq B/2$, то $t(i, j + a_i) := 1$

5. $t(i, a_i) := 1$

сложность: для m-та свод. св. сгр. $(+, -, \cdot, /) \Rightarrow O(nB)$

B - числ. н-р $\Rightarrow$ ат. неэффект.

$L = n \cdot \log_2 a_i$

разд. хорошо при B на очень больших.

нагл. $a_i \leq A \Rightarrow$ мин. ат. $\Rightarrow B \leq nA \Rightarrow O(n^2A)$

если A конст. $\Rightarrow O(n^2)$ т.е. можно.

ат. описан так, что табл. канд. m-т. т.е. $O(nB)$

Задача. Ал. неэффект. для построения свод. св. свод. разд. $\sum_{i \in N} a_i = B/2$

Алгоритм построения $N \subseteq N$

1. $N' := \emptyset$

2. $j_i := B/2$

3. $i_i := \min \{i: t(i, j_i) = 1\}; i_i \rightarrow N'$

4. $j_i := j_i - a_{i_i}$

5. если $j_i = 0$, то сгр. свод.

если $j_i \neq 0$, то шаг 3.



Spine 3Kara $\begin{pmatrix} d_j = 1 \\ B = 2 \end{pmatrix}$ nojagora

Пример 3 Классы $\mathcal{D}_1 = \{1, 2\}$
 $\mathcal{D}_2 = \{3, 4\}$
 $\mathcal{D}_3 = \{5, 6\}$
 $\mathcal{D}_4 = \{7, 8\}$
 $\mathcal{D}_5 = \{9, 10\}$
 $\mathcal{D}_6 = \{11, 12\}$
 $\mathcal{D}_7 = \{13, 14\}$
 $\mathcal{D}_8 = \{15, 16\}$
 $\mathcal{D}_9 = \{17, 18\}$
 $\mathcal{D}_{10} = \{19, 20\}$
 $\mathcal{D}_{11} = \{21, 22\}$
 $\mathcal{D}_{12} = \{23, 24\}$
 $\mathcal{D}_{13} = \{25, 26\}$
 $\mathcal{D}_{14} = \{27, 28\}$
 $\mathcal{D}_{15} = \{29, 30\}$
 $\mathcal{D}_{16} = \{31, 32\}$
 $\mathcal{D}_{17} = \{33, 34\}$
 $\mathcal{D}_{18} = \{35, 36\}$
 $\mathcal{D}_{19} = \{37, 38\}$
 $\mathcal{D}_{20} = \{39, 40\}$
 $\mathcal{D}_{21} = \{41, 42\}$
 $\mathcal{D}_{22} = \{43, 44\}$
 $\mathcal{D}_{23} = \{45, 46\}$
 $\mathcal{D}_{24} = \{47, 48\}$
 $\mathcal{D}_{25} = \{49, 50\}$
 $\mathcal{D}_{26} = \{51, 52\}$
 $\mathcal{D}_{27} = \{53, 54\}$
 $\mathcal{D}_{28} = \{55, 56\}$
 $\mathcal{D}_{29} = \{57, 58\}$
 $\mathcal{D}_{30} = \{59, 60\}$
 $\mathcal{D}_{31} = \{61, 62\}$
 $\mathcal{D}_{32} = \{63, 64\}$
 $\mathcal{D}_{33} = \{65, 66\}$
 $\mathcal{D}_{34} = \{67, 68\}$
 $\mathcal{D}_{35} = \{69, 70\}$
 $\mathcal{D}_{36} = \{71, 72\}$
 $\mathcal{D}_{37} = \{73, 74\}$
 $\mathcal{D}_{38} = \{75, 76\}$
 $\mathcal{D}_{39} = \{77, 78\}$
 $\mathcal{D}_{40} = \{79, 80\}$
 $\mathcal{D}_{41} = \{81, 82\}$
 $\mathcal{D}_{42} = \{83, 84\}$
 $\mathcal{D}_{43} = \{85, 86\}$
 $\mathcal{D}_{44} = \{87, 88\}$
 $\mathcal{D}_{45} = \{89, 90\}$
 $\mathcal{D}_{46} = \{91, 92\}$
 $\mathcal{D}_{47} = \{93, 94\}$
 $\mathcal{D}_{48} = \{95, 96\}$
 $\mathcal{D}_{49} = \{97, 98\}$
 $\mathcal{D}_{50} = \{99, 100\}$
 $\mathcal{D}_{51} = \{101, 102\}$
 $\mathcal{D}_{52} = \{103, 104\}$
 $\mathcal{D}_{53} = \{105, 106\}$
 $\mathcal{D}_{54} = \{107, 108\}$
 $\mathcal{D}_{55} = \{109, 110\}$
 $\mathcal{D}_{56} = \{111, 112\}$
 $\mathcal{D}_{57} = \{113, 114\}$
 $\mathcal{D}_{58} = \{115, 116\}$
 $\mathcal{D}_{59} = \{117, 118\}$
 $\mathcal{D}_{60} = \{119, 120\}$
 $\mathcal{D}_{61} = \{121, 122\}$
 $\mathcal{D}_{62} = \{123, 124\}$
 $\mathcal{D}_{63} = \{125, 126\}$
 $\mathcal{D}_{64} = \{127, 128\}$
 $\mathcal{D}_{65} = \{129, 130\}$
 $\mathcal{D}_{66} = \{131, 132\}$
 $\mathcal{D}_{67} = \{133, 134\}$
 $\mathcal{D}_{68} = \{135, 136\}$
 $\mathcal{D}_{69} = \{137, 138\}$
 $\mathcal{D}_{70} = \{139, 140\}$
 $\mathcal{D}_{71} = \{141, 142\}$
 $\mathcal{D}_{72} = \{143, 144\}$
 $\mathcal{D}_{73} = \{145, 146\}$
 $\mathcal{D}_{74} = \{147, 148\}$
 $\mathcal{D}_{75} = \{149, 150\}$
 $\mathcal{D}_{76} = \{151, 152\}$
 $\mathcal{D}_{77} = \{153, 154\}$
 $\mathcal{D}_{78} = \{155, 156\}$
 $\mathcal{D}_{79} = \{157, 158\}$
 $\mathcal{D}_{80} = \{159, 160\}$
 $\mathcal{D}_{81} = \{161, 162\}$
 $\mathcal{D}_{82} = \{163, 164\}$
 $\mathcal{D}_{83} = \{165, 166\}$
 $\mathcal{D}_{84} = \{167, 168\}$
 $\mathcal{D}_{85} = \{169, 170\}$
 $\mathcal{D}_{86} = \{171, 172\}$
 $\mathcal{D}_{87} = \{173, 174\}$
 $\mathcal{D}_{88} = \{175, 176\}$
 $\mathcal{D}_{89} = \{177, 178\}$
 $\mathcal{D}_{90} = \{179, 180\}$
 $\mathcal{D}_{91} = \{181, 182\}$
 $\mathcal{D}_{92} = \{183, 184\}$
 $\mathcal{D}_{93} = \{185, 186\}$
 $\mathcal{D}_{94} = \{187, 188\}$
 $\mathcal{D}_{95} = \{189, 190\}$
 $\mathcal{D}_{96} = \{191, 192\}$
 $\mathcal{D}_{97} = \{193, 194\}$
 $\mathcal{D}_{98} = \{195, 196\}$
 $\mathcal{D}_{99} = \{197, 198\}$
 $\mathcal{D}_{100} = \{199, 200\}$
 $\mathcal{D}_{101} = \{201, 202\}$
 $\mathcal{D}_{102} = \{203, 204\}$
 $\mathcal{D}_{103} = \{205, 206\}$
 $\mathcal{D}_{104} = \{207, 208\}$
 $\mathcal{D}_{105} = \{209, 210\}$
 $\mathcal{D}_{106} = \{211, 212\}$
 $\mathcal{D}_{107} = \{213, 214\}$
 $\mathcal{D}_{108} = \{215, 216\}$
 $\mathcal{D}_{109} = \{217, 218\}$
 $\mathcal{D}_{110} = \{219, 220\}$
 $\mathcal{D}_{111} = \{221, 222\}$
 $\mathcal{D}_{112} = \{223, 224\}$
 $\mathcal{D}_{113} = \{225, 226\}$
 $\mathcal{D}_{114} = \{227, 228\}$
 $\mathcal{D}_{115} = \{229, 230\}$
 $\mathcal{D}_{116} = \{231, 232\}$
 $\mathcal{D}_{117} = \{233, 234\}$
 $\mathcal{D}_{118} = \{235, 236\}$
 $\mathcal{D}_{119} = \{237, 238\}$
 $\mathcal{D}_{120} = \{239, 240\}$
 $\mathcal{D}_{121} = \{241, 242\}$
 $\mathcal{D}_{122} = \{243, 244\}$
 $\mathcal{D}_{123} = \{245, 246\}$
 $\mathcal{D}_{124} = \{247, 248\}$
 $\mathcal{D}_{125} = \{249, 250\}$
 $\mathcal{D}_{126} = \{251, 252\}$
 $\mathcal{D}_{127} = \{253, 254\}$
 $\mathcal{D}_{128} = \{255, 256\}$
 $\mathcal{D}_{129} = \{257, 258\}$
 $\mathcal{D}_{130} = \{259, 260\}$
 $\mathcal{D}_{131} = \{261, 262\}$
 $\mathcal{D}_{132} = \{263, 264\}$
 $\mathcal{D}_{133} = \{265, 266\}$
 $\mathcal{D}_{134} = \{267, 268\}$
 $\mathcal{D}_{135} = \{269, 270\}$
 $\mathcal{D}_{136} = \{271, 272\}$
 $\mathcal{D}_{137} = \{273, 274\}$
 $\mathcal{D}_{138} = \{275, 276\}$
 $\mathcal{D}_{139} = \{277, 278\}$
 $\mathcal{D}_{140} = \{279, 280\}$
 $\mathcal{D}_{141} = \{281, 282\}$
 $\mathcal{D}_{142} = \{283, 284\}$
 $\mathcal{D}_{143} = \{285, 286\}$
 $\mathcal{D}_{144} = \{287$

Формы $P_{\text{ФФ}}$ $L = n$, $P_{\text{ФФ}, 01}$ $\Rightarrow$ J с числ. пар-ми
 $P_{\text{ФФ}, 01}$ $M = a$
 $P_{\text{ФФ}, 01}$ $L = n$, $P_{\text{ФФ}, T1}$
 $P_{\text{ФФ}, 01}$ $M = T$

$T4: M=0$ *Вспомогательно* $\rightarrow$ *не итер.*
 $L=N$
 $O7: B, K \leq n$
 $L=N, M=K$ *не итер.*

$\exists$ для $P \in \text{NDC}_{\text{мн}}$ предполож. ат. $\Rightarrow$ ат. сер. $q(M, E)$
 но можно, что существуют $\Rightarrow$ работая, но там
 $M(2) \leq p(E(2)) \Rightarrow q(p(E), E) \Rightarrow q'(E)$
 $\Rightarrow$ если $P \neq \text{NP}$, то для $\text{NDC}_{\text{мн}}$ точно не м. быть предполож. ат.

Прим. ЗК $\rightarrow$ сут. - MP , т.е. не мож. получить $PC \Rightarrow MP$
Прим. $\Delta V MP$ не вкл. в чис. партия - потому брат суффиксов
 (из 71 - только Радс чис. партии) или жаргон $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ при $P \neq NP$ не м.б. сведено к сел.

П.Н. Изучили с метал. пар. или: стали, где метал. метал. - если они метал. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ в метал. метал. (прим. - ПЗ)
вот кри. и - не в метал. метал. в метал.
вот, в метал. в метал. метал. ПЗ, в метал. метал. - метал. метал. в метал.
разб. есть в метал. метал. $\Rightarrow$ если метал. $\Rightarrow$ не в метал. метал. метал.

Непротонная сводимость

$$\begin{array}{cc} \mathcal{P} & \mathcal{P}' \\ \mathcal{D}_n & \mathcal{D}_n' \\ \mathcal{Y}_n & \mathcal{Y}_n' \\ \mathcal{H}_n & \mathcal{H}_n' \end{array}$$

⑦) Если $\Pi \in NP$, $\Pi' \in NP$, $\Pi \Rightarrow_{\text{lin}} \Pi'$, то $\Pi' \in NP$

Задача 3. Разделение
 заданн. n элементов $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ на 3 группы
 $B_1: B_1/4 < a_i < B_1/2 \quad \forall i \in N$

$\sum_{i \in N} \bar{w}_i = nB$? можно ли разбить N на n непересекающихся групп $N = N_1 \cup \dots \cup N_n$: $N_i \cap N_j = \emptyset, i \neq j$
 таких, что $\sum_{i \in N_j} \bar{w}_i = B, j = 1, n$
 получается, ровно $3n$ в каждой N_j .

РМРС
N-гидрокси- ϵ -N-пропилов, T-гидрокс

показали, что $NDCS$
показатели $NDCS$ по территории
1. $PMDC \in NP$ - показывали
2. $3-PMDC = \frac{1}{2}$ $PMDC$ - показатели

$N \subseteq \mathbb{N}$ $a_i \in \mathbb{N}$ $b_i \dots$? и погреш.	$N, m: \mathbb{N}$ $t_i = a_i, i \in \mathbb{N}$ $T = B$ симметричные о
--	--

? п подм. | Минимизация объема
 да $\Rightarrow$ меньше разбить $\Rightarrow$ раздробились так же по проц.
 $\Rightarrow$ сумм. Σ = B $\Rightarrow$ да
 нет $\Rightarrow$ т.е. $\Sigma < B \Rightarrow$ разб. на n. Иногда $\Sigma > B$
 $\Rightarrow$ нет

2 гр-а: $\text{дубон, пол.} = \text{дубон, пол.} = - \text{полн. снт} \Rightarrow \text{необходно}$

$$N=B \quad N=B$$

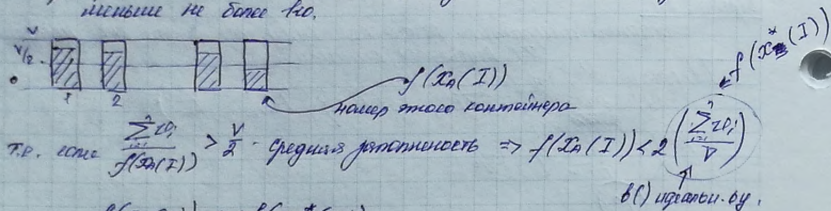
$$L=n+\log_2 B \quad L'=n+\log_2 B$$

присущая пещ. ал.
Водность по Гурину
труднее и КР. иже задачи

ПО-оптимизация, задача

Колл О: " - " - найти кратчайший маршрут калмы.
Реш О: " - " - или много Э - пройти так отсюда
Если типа "разделен" - Реш О: "до реки" и указать разд. если до
живоотно - Гали О: указать угол

Будем считать, что верш v^2
 Если в р-е работы все, число контейнеров, размещ. на полке или
 меньше не более 40.



т.е. если $\frac{\sum_{i=1}^n c_i}{f(x_0(I))} > \frac{v}{2}$ - средняя плотность $\Rightarrow f(x_0(I)) < 2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n c_i}{v} \right)$
 в(с) пределах. вы.

$$f(x_0(I)) < 2f(x^*(I))$$

$$\frac{f(x_0(I))}{f(x^*(I))} < 2 \Rightarrow \chi_0'(I) < 2 \Rightarrow \chi'(I) \leq 2$$

(всегда - при опт. - вы. 4/3 раза)

Пример ЗКО

$$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$$

или на построении мин. остовного дерева

$$G=(V,A)$$

$$d_{ij}, (i,j) \in A$$

Правила дор - $\sum_{i,j} c_{ij}$ по ребрам
 D.R. - дор $\in A$, миним. все верши.
 мин. дор - D.R. мин. дор

Методы алгоритмы

$$1) V' = \emptyset, A' = \emptyset$$

$$2) i \in V, i \rightarrow V'$$

$$k=2, n$$

$$3) \min_{i \in V, i \rightarrow V'} d_{ij} = d_{ij_0}$$

$$j_0 \in V'$$

$$(i, j_0) \in A$$

$$\Rightarrow j_0 \rightarrow V'$$

$$(i_0, j_0) \rightarrow A'$$

Упр. На каждой вершине поместить поддерево ~~или~~ M.D.

Все поддерево по числу узлов

т.е. узлов. по ребрам - это поддерево

т.е. дор. некое. верш. и ребра

Если ребро $\in$ M.D. $\Rightarrow$ дор.

M.D. $\Rightarrow$ $\exists$ путь $i_0 \rightarrow j_0$

$\exists (i, j_0)$ - миним. ребро

$d_{ij_0} \leq d_{ik}$ $\Rightarrow$ $i \rightarrow j_0$ (или) дор. (i_0, j_0)

В м. дор, M.D. и дор, дор. тоже

можно утв., что $d_{ij_0} = d_{ik}$, т.е. M.D.

Если все вершины поддер. $\Rightarrow$ мин. миним. - M.D.

Ал. 1) M.D. мин. M.D. $O(n^2)$ ребер $\Rightarrow$ миним. M.D. $\Rightarrow O(n^3)$

2) Миним. обход M.D. (ходит туда-сюда) $O(n)$, L_2 - дор. миним.

3) Миним. обход M.D. - миним. миним., где дор. $\Rightarrow L_3$

Для миним. цр. графика L_1 и L^*

$$L_1 \leq L^*$$

или цр. миним. цр. - $L_1 \leq L^*$

$L_1 \leq L^*$ или все $d_{ij} \geq 0$

$$L_2 = 2L_1$$

$$L_3 \leq 2L_1 - L_2$$

$$\frac{L_3}{L^*} \leq 2 \Rightarrow \chi'_1 \leq 2$$

Равномер

Задача с паросотатными (или, по-другому, в 2-х частях) в 2-х частях.

$G=(V,A)$, $d_{ij}, (i,j) \in A$, $|V|=n=2k$
 паросот.: номер ребер $(i_1, i_2), (i_3, i_4), \dots, (i_{n-1}, i_n) \in A$ (все i_j различны)

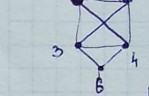
Величина паросот.: $\sum_{j=1,3,\dots,n-1} d_{ij}$

Заг: опт. паросот. мин. величина $\exists$ ат $O(n^3)$ и даже более строг.

Задача паросотатных

$G=(V,A)$ - двудольный граф

Заг: $\exists$ мин. в цр. $\Rightarrow$ Гилберт цикл (цр. ребер графа, ровно 1 раз каждого ребра)



Если $\exists$ $\exists$ $\Rightarrow$ канон. верш. имеет четн. степень
 А вот др. $\Rightarrow$ канон. $\Rightarrow$ миним. влосот.

Вспомогат. - ат. цр.: $\forall$ верш. имеет четн. ст. $\Rightarrow$ Гилберт граф

Ал.: $\forall$ верш. и миним. ребро

если $n=1$ и по всем $\Rightarrow$ миним.

если ат. $\Rightarrow$ берем верш. и ребро

$\Rightarrow$ еще 1 цикл (верш. не 1)

связи. цр. $\Rightarrow$ рано или поздно

мы получим эту связность

Когда ат. сбалансирован. неск. циклов, свз., между собой

в $\exists$ идем до 1 переим. $\Rightarrow$ ат. цикл $\Rightarrow$ верш. и ребро

Ал. миним. ат. миним. миним.

$G=(V,A)$ - миним. граф $|V|=n$

1) миним. M.D. $O(n^3)$, L_1

2) $V \subseteq V$, $\forall i \in V$ имеет миним. степень

дальше работаем с деревьями

$|V|=2k$

по инт: $\Rightarrow$ дор. /р. мин. $\Rightarrow$ ат.

если 1 миним. $\Rightarrow$ ат. миним.

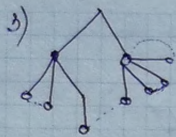
1) подграф графа G , опт. на этих вершинах

$G=(V,A) \rightarrow$ решаем (о мин. паросотатных

и миним. мин. паросотатных в G)



Amway



Роб. к. тмш. дереву меря, сор. паросе.
 $\Rightarrow$ бинарный граф

Находим бинарный цикл сложность $O(n)$
 $O(n^2)$ в нашем графе

Функция L_3

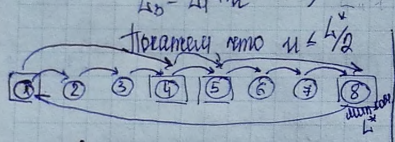
L_3 не свл. маршрутом Копли!

4) Проверка маршрута Копли.
 минимизируем посл. шаг. ам. A_1
 проходящий и несл. беря в ост. полагали $\Rightarrow$ не заходим

Функция L_4 $O(n^2)$

Сложность $A_1 - O(n^3)$

$$\begin{aligned} L_4 &\leq L_3^* \\ L_4 &\leq L_3 \\ L_4 &= L_3 + n \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} L_4 &\leq L_3^* \\ L_4 &\leq L_3 + n \end{aligned} \Rightarrow L_4 - n \leq L_3^*$$



$$\Rightarrow L_4 \leq \frac{3}{2} L_3^* \Rightarrow \frac{L_4}{L_3} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{L_4}{L_3} \leq \frac{3}{2}$$

$\square$ - берем миним. $u_1(n, 2) \Rightarrow$ Копли

используем только по нмш

$u_1 = \sum_{i=1}^n \text{паросетанний} : (1, 5) (6, 8) - u_1$

$u_1 + u_2 \leq L_3$ и $n - \text{то } \Delta$ и $(4, 7) (1, 8) - u_2$

$u_1 - \text{мин парос.} \Rightarrow 2u_1 \leq L_3^* \Rightarrow u_1 \leq \frac{L_3^*}{2}$ и m, g

$(\min(u_1, u_2)) \leq \frac{L_3^*}{2}$; $u_1 \leq \min(u_1, u_2) \leq \frac{L_3^*}{2}$

Задача РМНО

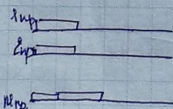
$N = \{1, \dots, n\}$ м. пр. i, j - групп., $i \in N$
 (мин. макс. групп. пр.)

Находим минимизируем A

0) $T_{ij} = 0$; $j = i, m$

1) $\min_{j=1, m} T_{ij} = T_{ij_0}$

$T_{ij_0} = T_{ij_0} + t_i$



$O(n)$
 $O(\log n \cdot n)$

если T_{ij} хр.
 в виде T_{ij} ,
 где i и j беря

L_3 : и работ $\Rightarrow$ и проверка

Зам. T_{min} , T_A — др. расстояние вкл. в некот. ил.м.у

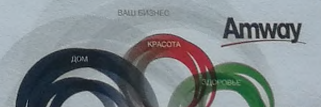
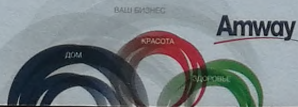
$$T_A = \min_{j \in M} T_j + t_{ij} \leq T_{min}^*$$

$$\frac{T_A}{T_{min}} \leq \frac{T_{min}^*}{T_{min}} \Rightarrow \alpha_A \leq 2 \text{ то средняя оценка}$$

- а) Если др. по неформ. — есть оценки меньше
б) можем сделать рел. отг. инд. j.

$$T^* = \frac{\sum t_i}{m}$$

Заметим отг. $\frac{T_A}{T_{min}} \leq \frac{T_A}{T^*}$ — можем отг. явно $\rightarrow$ отг. др. по неформ. и она часто существенно $< \alpha_x$





Рандомизированный алгоритм.

Вопрос: Проверка идентичности полиномов. (ПНП)

$f(x_1, \dots, x_n)$
если по переменной x_i
то $f(x_i) \equiv 0$

предп., что по каждой переменной. быстро
(x_1, y_1), (x_2, y_2)... - а раскрыть скобки это долго.
(x_n, y_n) - а шаг неоправдан.

или 1 шаг. итер. перебр. раскрытия - не опят. не пошл. сл.?
Если правдиво $\Rightarrow$ алгоритм дан $\exists$ (# "разреш")

Лемма Шварца Если $f(x_1, \dots, x_n)$ - полином и перебр. ст. $\leq k$
по каждой пер. и $\neq 0$. Если $d_i, i=1, \dots, n$ - различные
числовые, вл. величины, числ. ж. и. ст. $[0, N-1]$ и
равном. разпр. на $[0, N-1]$, то вероятность
 $P_r \{f(d_1, \dots, d_n) = 0\} \leq k/n$

Алгоритм ПНП $\Delta[0; 2^n]$, проводим эксперимент.
итер. перебр. и. в. $d_1, \dots, d_n$ $f(d_1, \dots, d_n) \neq 0 \Rightarrow f \neq 0$
 $f(d_1, \dots, d_n) = 0 \Rightarrow$ дальше.
 $f(d_1, \dots, d_n) \neq 0 \Rightarrow f \neq 0$
 $\exists$ 100 раз и везде нуль.
1) $f \neq 0$ - вера соблюдена $\leq 1/2$ - 1 раз 0

вер. итер. 0 - $\leq \frac{1}{2^{100}}$ Если перебр. $f \neq 0$
 $\Rightarrow$ вера соблюдена $f \equiv 0$.
 $\Rightarrow$ ошибка только если $f \neq 0$ с очень мал. вер. т.е.

Вывод:

Подход с параллельностью в графовом графе.

$V = \{V_i\}$
 $V = A \cup B$ $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $B = \{b_1, \dots, b_m\}$
 $E = \{(a_i, b_j)\}$

Матрица инцидентности, равна 0 ребер. Канон. из A в B равно в той паре

матр. $M = \|m_{ij}\|, m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } (a_i, b_j) \in E \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

(Th) матрица инцидентности в гр. $G \Leftrightarrow \det M \neq 0$ (будет нол. как в сит. ПНП)

Прим. $\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$ $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 \\ x_3 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$

$$\det M = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_2 x_3 + 0 - 0 x_2 x_3 - 0 x_1 x_3 - 0 x_1 x_3 = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_2 x_3 \neq 0 \Rightarrow \text{инцидентность}$$

Вывод: матрица, ил. стр., каноническое ест. инцидентности. кан. $\Rightarrow$ кан. ин. в преобразовании.

$\Rightarrow$ если все кан. ин. ил. $\Rightarrow$ у стр. есть хотя бы 1 нол.
дел. 0 во всех нол. $\Rightarrow \det \neq 0$
Если нол. $\Rightarrow$ канон. стр. кан. ин. ин. нол. = 0

и.м.г.

Прим: $M \rightarrow \text{кан. стр.} \rightarrow \text{ин. гр.} \rightarrow \det \neq 0$ $\Rightarrow$ есть кан. ин.

По КР

① $F(x, y) -$
 $x, y \in [a, b]$
 $y \in [c, d]$

Найти сигн. на этом прямоугольнике

можно перебр. $x \rightarrow$ ищем или по $y \Rightarrow$ перебр. $x \Rightarrow$ max по x
перебр. $y \Rightarrow$ если $\Rightarrow$ е.т.
это долго, так перебр. не делаем.

$$F_x'(x, y)(x-a)(x-b) = 0$$

$$F_y'(x, y)(y-c)(y-d) = 0$$

решимое уравн., x_i, y_i - решение.

x_i

Th: если (x_0, y_0) - е.т. в нек. стр., то она е.т. этой матрицы.

только среди них.
Для канон. стр. можно проверить
это перебр. Th: если перебр. на стр. е.

$F(x, y_0) \leq F(x_0, y_0) \leq F(x_0, y)$ - перебр. по стр.

② на доминирование.

$\begin{matrix} \text{---} \\ \text{VI} \end{matrix}$

втеривации (если втеривает $\Rightarrow$ втеривает и не)
если втеривает 1 к стр. доминировать др. стр. $\Rightarrow$ ее втеривать.

d_1
 d_n

$d_i \geq 0$
 $\sum d_i = 1$

$\begin{matrix} \text{---} \\ \text{VI} \end{matrix}$

по стр.: $\begin{matrix} \text{---} \\ \text{VI} \end{matrix} \leq \begin{matrix} \text{---} \\ \text{VI} \end{matrix}$ втеривации (для л.к. аналогично)

$2 \times n$ - матрица канон. графич. метод.

$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ $f_j: y = p \cdot a_j + (1-p) \cdot a_j$

мин. отклонения, но $\neq$ на $[0, 1]$
потом макс. $\Rightarrow$ все $\in [p_0, 1-p_0]$ $f(\cdot)$ - значение итер.
все $\in [p_0, 1-p_0]$ f_j - значение итер. f_j у стр. f_j
 $f_j: y = p \cdot a_j + (1-p) \cdot a_j = 0$
($a_1, p_0, \dots, p_0, 0$)

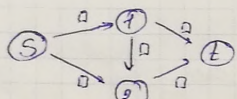
Если макс. в. $\Rightarrow p_0 = 1$
у доо - мин. $\Rightarrow (0 \dots 1 \dots 0)$

Если $\nearrow$ 1. итер. на $[p_1, p_2] \Rightarrow$ вид $(p_0, 1-p_0)$ $p_0 \in [$
2. итер. $2 \times$ точек перевернуто.

Матрица - матрица в матрице $\rightarrow$ кр. р. $\rightarrow$ деп. матрица $\rightarrow$ проверить.
 $V_{\text{св.с.}}$ - в.м. п.е. крайних стратегий

Если $n \times 2$: $-A^T \Rightarrow p_0 = q^*$
 $q_0 = p^*$
 $V_0 = V^*$

④ Макс. поток в сети. ФФ



ув.п	δ
$S-t-t$	3
Σ	

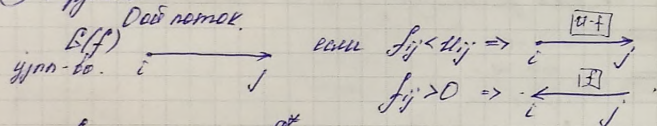
- макс. поток

Нужно сеть и показать потоки еще раз!

Мин. разр.: привести к формуле $\Rightarrow$ велич. разр. $= \sum \alpha_{ij} V_{ij}$
 если разр. - визуальное
 велич. совп. $\Rightarrow$ все верно - миним. примерно так

или: Когда кончат $\rightarrow$ т.е. прощ. расчет. пом. $\rightarrow$ если истощили,
 "дальше. ант., упр. пом. - ... , д.у.м. с.р. мин. разр.у

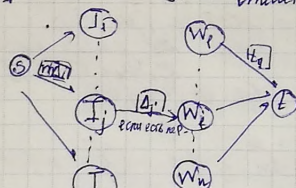
⑤ Каргалева



Если путь есть $\Rightarrow L_f^*$ - миним. сеть
 как только дошли до t - миним. разр.м.
 корр. потоки в L : прир. $\Rightarrow$ увелич.
 $\Rightarrow L(f)$ и g, g , бор. $\Rightarrow$ уменьш.

⑥ Компьютерное расписание

n $i \in V_i$ (v_i, f_i, I) $0 \leq f_i \leq I$ $S_i \leftarrow$ отметить все возм.



⑦ $I_{\text{огр.}}$ распис.

Если есть: $I \xrightarrow{S/4} w$ f - время, на которое увеличивается

⑦ NP-полнота
 $1 \leq NP$

крайне мин. кр.в. ант. и
 L - пр. гр.
 миним. сложность

или правильно. то значит, что обоснованы

2. $P \in NPC$ $P' \Rightarrow P$

или $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P$

или $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P$

или $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P$

миним. как вл.ч. п.р.р. на. н.у. п.р.р. P' , чтобы было
 видно миним. т.е.
 показ. сложность. с.е. $g \rightarrow g$ или $g \leftarrow g$ или $g \rightarrow g$
 $h \rightarrow h$ $h \leftarrow h$ $g \rightarrow g$

⑧ миним. NPC

миним. с.р. $P_r: M \leq p(P)$ и все $P_r \in NPC$
 или SNP , P - миним. NPC $P' \Rightarrow P$

д.у. обор. $\rightarrow$ ЗР - миним. NPC

если не с.р.м. п. $\rightarrow$ NPC с.р.м. п. $\rightarrow$ все мин. NPC

⑨ док. что NP hard/easy

св. по Тарг: $P \xrightarrow{NP} PO \Rightarrow NP_H$

лучше всего анализ g в д.у.м. рас. св-в
 т.е. кр.в.р. - это и как рас. ПО
 мин. цел. где с.р.м. A миним. то с.р.м. миним.

2. $PO \Rightarrow P \in NP$

миним. к. рас.

миним. с.р. рас. NP (т.е. к. - д.у.м. рас. на д.у.м. рас.)

⑩ NPC $\Rightarrow$ миним. $NP \Rightarrow P$ $\Rightarrow$ миним. рас. рас. рас.

$NP \Rightarrow NP \Rightarrow P$ - того хватает.